

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, Teil A

Chaos am invertierten Pendel

Versuch 5.1

Gruppe 14

W.Bender (walter.bender@rwth-aachen.de), J.Luckas (c.hihiro@gmx.de)

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel und Zweck des Versuchs:	2
2	Grundlagen	3
2.1	Chaos	3
2.2	Voraussetzungen für Chaos	3
2.2.1	Nicht-lineare Differentialgleichung	3
2.2.2	Phasenraum	3
2.3	Erzeugen von Chaos	4
2.3.1	Bifurkation	4
2.3.2	Intermittenz	4
2.3.3	Quasiperiodische Weg ins Chaos	4
2.4	Erkennen von Chaos speziell am invertierten Pendel	4
2.5	Amplitudensprünge und Hysterese	5
2.6	Duffingpotential	5
3	Versuchsaufbau	6
4	Pendelbewegungen	7
4.1	Versuchsdurchführung	7
4.2	Versuchsergebnisse	7
4.2.1	Harmonische Antwort	7
4.2.2	Subharmonische Antwort	8
4.2.3	Chaotische Antwort	9
5	Amplitudensprung	10
5.1	Versuchsdurchführung	10
5.2	Versuchsergebnisse	10
6	Bifurkation	11

1 Ziel und Zweck des Versuchs:

Im Mittelpunkt dieses Versuchs steht das angeregte invertierte Pendel. Je nach Einstellung der Systemparameter kann sich dieses physikalische System regelmäßig oder chaotisch verhalten. Es sollen nun Parameter gefunden werden, bei welchen das Pendel harmonisch, subharmonisch oder chaotisch antwortet. Ein weiteres Ziel ist den auftretenden Amplitudensprung und das Hystereseverhalten bei regulärer Pendelbewegung zu messen. Darüber hinaus wird mit einer numerischen Simulation eines Pendels im Duffingpotential die Bifurkation (Periodenverdopplung) untersucht und damit die Feigenbaumzahl bestimmt.

2 Grundlagen

2.1 Chaos

Das Wort Chaos hat seinen Ursprung in der griechischen Sprache und bedeutet wüstes Durcheinander oder Aufhebung aller Ordnung. Physikalisch nennt man ein System chaotisch, wenn sich seine Bewegung nicht für längere Zeit vorhersagen lässt, also keiner erkennbaren Ordnung mehr folgt. Ursache dieses Verhaltens ist die hohe Empfindlichkeit des Systems bezüglich seiner Anfangsbedingungen. Nur kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen haben drastische Auswirkungen auf die Entwicklung des Systemverhaltens.

2.2 Voraussetzungen für Chaos

2.2.1 Nicht-lineare Differentialgleichung

Chaotische Systeme werden stets durch nicht-lineare Differentialgleichungen beschrieben. Eine nicht-lineare Bewegungsgleichung ist zwar Voraussetzung für chaotisches Systemverhalten, aber keine zwangsläufige Folge. Im Parabelpotential ist also niemals Chaos beobachtbar, da dieses Potential stets eine lineare Rückstellkraft $F = -kx$ hervorruft. Aus diesem Grund muss das Potential mindestens 3. Grades sein.

2.2.2 Phasenraum

Jeder Zustand des Systems kann durch Punkte im Phasenraum beschrieben werden. Ein Zustand ist in der Regel durch generalisierte Koordinaten q_1, \dots, q_f und ihren zugehörigen generalisierten Impulse $p_1 \dots p_f$ bestimmt. Der Raum der durch diese $2f$ Koordinaten aufgespannt wird, wird als Phasenraum bezeichnet. Die zeitabhängige Bewegung kann also durch eine Linie im Phasenraum dargestellt werden, die Trajektorie genannt wird. Verschiedene Trajektorien können sich niemals im Phasenraum kreuzen, da sich selbst chaotische Systeme deterministisch verhalten, d.h. die Anfangsbedingungen legen die Bewegung für beliebige Zeiten fest. Im Falle eines Schnittpunktes könnte sich das System zu einem Zeitpunkt t frei für eine Entwicklung der Bewegung entscheiden, was dem Prinzip des Determinismus widerspricht.

Verhält sich ein System chaotisch, werden sich zwei eng benachbarte Trajektorien im zugehörigen Phasenraum exponentiell mit der Zeit entfernen. Beliebig kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen oder Unsicherheiten in ihrer experimentellen Bestimmung, führen also zu völlig unterschiedlichen Bewegungen. Mathematisch lässt sich dieses Verhalten im Phasenraum durch die Gleichung

$$d(t) = d_0 e^{(\lambda t)} \quad (1)$$

fassen, wobei d_0 den Abstand der Trajektorien zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ charakterisiert und λ als Lyapanov-Exponent bezeichnet wird. Ein positiver Lyapanovkoeffizient λ ist ein weiteres hinreichendes Kriterium für Chaos.

Weiterhin sind reale Systeme immer dissipativ, da immer ein Teil der Bewegungsenergie durch entstehende Reibungskräfte in Wärme umgewandelt wird. Aus diesem Grund erreichen die Trajektorien nach endlich langer Zeit einen begrenzten Bereich des Phasenraums, den man als Attraktor bezeichnet. Dabei ist die Dimension des Attraktors immer kleiner als die des Phasenraums. Die Attraktoren chaotischer Systeme heißen seltsame Attraktoren und ihre Dimension muss größer als zwei sein. Folglich muss der Phasenraum mindestens dreidimensional sein, wenn chaotisches Verhalten beobachtet werden soll.

2.3 Erzeugen von Chaos

Es gibt mindestens drei unterschiedliche Arten ein reguläres System ins Chaos zu stürzen.

2.3.1 Bifurkation

Die Bifurkation ist auch unter dem Begriff Periodenverdopplung bekannt. Bei dieser Methode wird ein Parameter der anregenden Kraft wie bspw. die Amplitude der Kraft F erhöht, bis sich die Periodendauer mit welcher das System antwortet, verdoppelt hat. Dieser Schritt wird ständig wiederholt, bis das System im Chaos endet. Aus der Differenz der Parameterwerte F_n , bei denen diese Bifurkationen auftreten, kann die Feigenbaumzahl berechnet werden. Sie ist eine Naturkonstante und konvergiert für große n gegen:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 4,6692 \quad (2)$$

mit

$$\sigma_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{F_{n+1} - F_n} \quad (3)$$

2.3.2 Intermittenz

Bei Intermittenz wird durch Variation eines Anregungsparameters die reguläre Lösung immer häufiger durch chaotische Sequenzen unterbrochen. Ist ein kritischer Wert überschritten verhält sich das System vollständig chaotisch.

2.3.3 Quasiperiodische Weg ins Chaos

Hierbei gelangt das System über Aufbrechen eines quasiperiodischen Orbits ins Chaos.

2.4 Erkennen von Chaos speziell am invertierten Pendel

Im Versuch wird das Verhalten des invertierten Pendels näher untersucht. Dazu ist es wichtig auf ein Instrument zurückzugreifen mit dem man Chaos messen kann. Das invertierte Pendel wird durch eine nichtlineare Differentialgleichung beschrieben. Die Nichtlinearität der DGL ergibt sich in Folge der wirkenden Gewichtskraft auf die Pendelmasse. Damit bewegt sich die Pendelmasse im Potential

$$V(\Theta) = \frac{k\Theta^2}{2} + MgL(\cos(\Theta) - 1) \quad (4)$$

Durch Anregung des Pendels mit einer sinusförmigen Kraft können unterschiedliche Antworten erreicht werden. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ist durch die allgemeine Form

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + D \quad (5)$$

gegeben. Die Bewegung ist eine Überlagerung unendlich vieler Frequenzen ω_n und die zugehörigen Amplituden A_n und Phasen φ_n können von allen Parametern des Pendelsystems abhängen. Das System wiederholt sich in diesem Fall in seiner Bewegung nie und seine Entwicklung ist unvorhersagbar und somit chaotisch.

Durch Wahl bestimmter Parameter des Systems kann auch eine reguläre Antwort des Pendels erreicht werden. Seine Bewegung wiederholt sich dann periodisch mit der Periodendauer T .

Nach dem Fouriertheorem kann dann die Bewegungsgleichung durch die Überlagerung endlich vieler Vielfache der Frequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ dargestellt werden. Die Allgemeine Bewegungsgleichung (5) geht also im Fall der periodischen Antwort über in:

$$x(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) + D \quad (6)$$

Die Frequenz ω_0 kann dabei ein ganzzahliges Vielfaches der Anregerfrequenz ω_d sein. Diesen Fall nennt man harmonische Antwort des Pendelsystems. Ist ω_0 ein Bruchteil der Anregerfrequenz ω_d so bezeichnet man dieses Verhalten als subharmonische Antwort.

Naheliegender ist nun die Wahl der Fouriertransformation zum Nachweis des chaotischen Verhaltens. Durch das Fourierspektrum kann dann sofort auf das Systemverhalten des Pendels zurückgeschlossen werden. Nachteilig an dieser Methode ist jedoch, dass ein kontinuierliches Frequenzspektrum nicht unbedingt durch Chaos entsteht. Eine weitere Ursache kann auch Rauschen sein oder die diskreten Frequenzen liegen so dicht nebeneinander, dass das Spektrum kontinuierlich erscheint. Zum Glück kann im unserem Versuchsaufbau Rauschen ausgeschlossen werden und auf die weitere Schwierigkeit muss im Laufe des Experiments geachtet werden.

2.5 Amplitudensprünge und Hysterese

Das nichtlineare System „das angeregte, invertiertes Pendel“ zeigt auch außerhalb seines chaotischen Verhaltens interessante Merkmale wie Amplitudensprung und Hysterese. Voraussetzung zur Beobachtung dieser Phänomene sind mindestens zwei Attraktoren und ein einfaches Muldenpotential. Dabei führt jeder der Attraktoren zu einer Schwingung des Pendels mit unterschiedlicher Amplitude. Je nach Anfangsbedingung, also je nach Startort im Phasenraum, strebt das Pendel den einen oder anderen Attraktor an. Die verschiedenen Attraktoren teilen den Phasenraum also auf. Ist der Anfangspunkt im Bereich von Attraktor X wird das System diesen Attraktorzustand anstreben. Die Grenzen dieser Phasenraumbereiche können durch Erhöhen der Anregerfrequenz ω_d überschritten werden. Bei der Grenzüberschreitung tritt dann der Amplitudensprung auf. Wird nun die Frequenz wieder erniedrigt tritt der Amplitudensprung bei einer kleineren Anregerfrequenz auf. Das Verschieben der Phasenraumgrenze wird als Hysterese bezeichnet.

2.6 Duffingpotential

Mit einem Simulationsprogramm soll die Bifurkation im periodisch angeregten Duffingpotential studiert werden. Das Duffinpotential beschreibt ein symmetrisches Doppelmuldenpotential:

$$U(x) = \frac{-x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \quad (7)$$

Die eindimensionale gedämpfte Bewegung in einem Duffingpotential ist ein weiteres Beispiel für ein nichtlineares System. Der zugehörige Phasenraum besitzt drei Dimensionen: x Position der Masse, p_x Impuls der Masse, und φ die Phase der anregenden Kraft und die Voraussetzungen für Chaos sind gegeben.

3 Versuchsaufbau

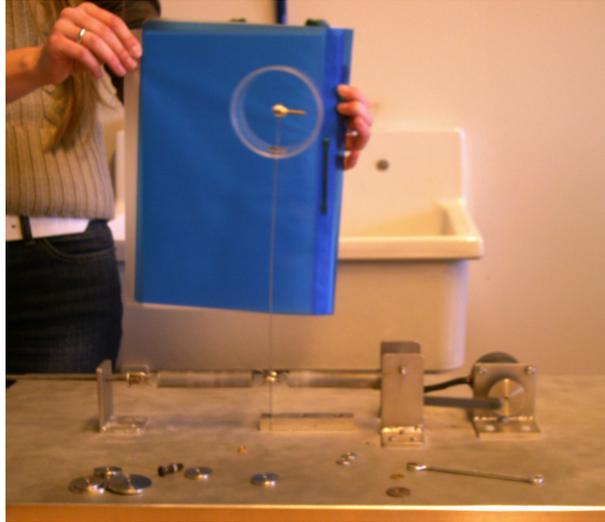


Abbildung 3.1: Versuchsaufbau

Das invertierte Pendel besteht aus einem entschärften Sägeblatt, an dessen Ende ein Plexiglashohlzylinder befestigt ist. Dieser Hohlzylinder kann weiter beschwert werden. Dazu stehen Zusatzgewichte der Massen 2 gr, 10 gr oder 25 gr zur Verfügung. Das entschärfte Sägeblatt ist von beiden Seiten an Federn befestigt, wobei eine Feder durch einen Schrittmotor periodisch gestaucht und gestreckt wird, wodurch die Anregung realisiert wird. Die Kraft des Motors kann in sieben Stufen variiert werden. Die Frequenz der Anregung wird mit einem Frequenzgenerator mit vierstelliger Digitalanzeige eingestellt. Die Auslenkung des Pendels wird durch ein Sonarmodul gemessen. Das Sonarmodul ist mit einem PC verbunden. Mit dem Programm TRACKER werden in einstellbarer Abtastfrequenz Ultraschallpulse vom Sonarmodul ausgesendet und gleichzeitig ein Timer zur Zeitmessung gestartet. Die Schallwelle wird am Plexiglaszylinder reflektiert und das Echo wieder vom Modul aufgefangen. Darauf wird der Timer gestoppt und der Zählerstand gespeichert. Aus Timerfrequenz und Schallgeschwindigkeit berechnet Tracker die Entfernung des Moduls zum Zylinder. Die gemessenen Schwingungen können mit dem Programm „Easyplot“ fouriertransformiert werden.

4 Pendelbewegungen

In diesem Versuchsteil soll das Verhalten des invertierten Pendels studiert werden. Es sollen Beispiele für die Fälle harmonisches, subharmonisches und chaotisches Verhalten des Pendels gefunden werden.

4.1 Versuchsdurchführung

Zunächst wird der Pendelkörper mit Hilfe der Zusatzgewichte um 70 gr beschwert. In diesem Fall bildet das Potential nach Gleichung (4) eine Doppelmulde, da $k < MgL$ gilt. Mittels eines Lineals wird die Höhe der beiden Potentialmulden austariert. Die Kraft des Motors wird auf 0,5 N eingestellt und die Anregerfrequenz von 0,25 -0,55Hz variiert. Zur Messwertfassung dient das Programm „Tracker“, in dessen Benutzeroberfläche die Parameter Abtastrate, Abtastfrequenz und Anzahl der Messpunkte (Datapoints) eingestellt werden können. Alle Messungen wurden bei einer Abtastrate von 1 und mit 1024 Datenpunkte durchgeführt. Zusätzlich gibt „Tracker“ die benötigte und verbleibende Messzeit an.



Abbildung 4.1: Benutzeroberfläche des Programms Tracker

4.2 Versuchsergebnisse

Als Versuchsergebnisse können wir folgende Grafiken präsentieren.

4.2.1 Harmonische Antwort

Eine harmonische Antwort des Pendels wurde bei einer Anregerfrequenz $f_d = 0,2087\text{Hz}$ erreicht. Die Abtastfrequenz betrug $f_a = 10\text{Hz}$.

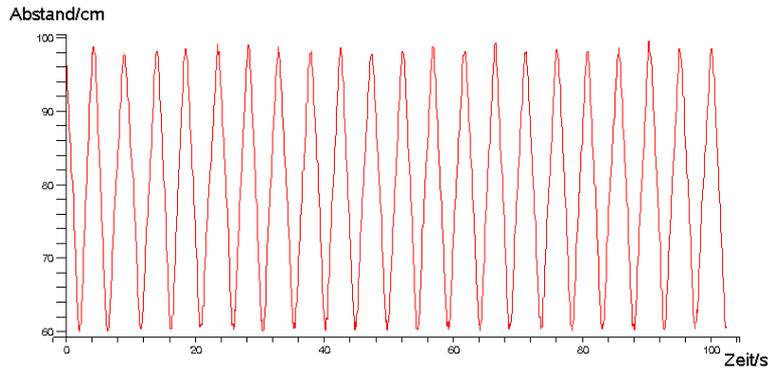


Abbildung 4.2: Harmonische Antwort des invertierten Pendels

Im zugehörigen Fourierspektrum erkennt man einen ausgeprägten Peak bei der Anregerfrequenz $f_d = 0,21$ Hz und kleinere Peaks bei $f = 2f_d$ und $f = 3f_d$.

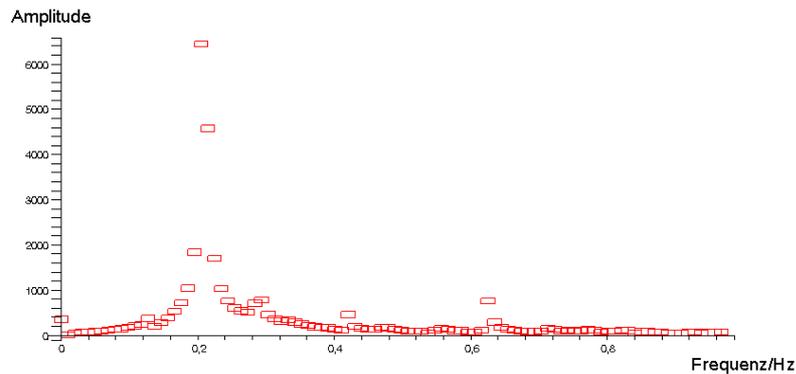


Abbildung 4.3: Fourierspektrum der harmonischen Antwort

4.2.2 Subharmonische Antwort

Bei einer Anregerfrequenz von $f_d = 0,5313$ wird eine subharmonische Bewegung des Pendels aufgenommen. Bei dieser Messung wurde um über einen längeren Zeitraum zu messen eine Abtastfrequenz $f_a = 4\text{Hz}$ eingestellt.

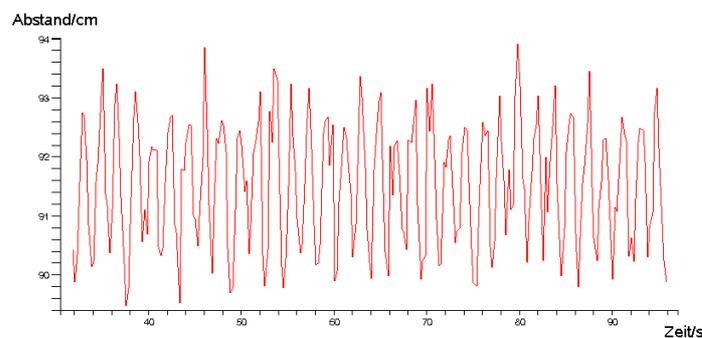


Abbildung 4.4: Subharmonische Antwort des Invertierten Pendels

Im Fouierspektrum sind deutlich Peaks bei der Anregerfrequenz $f_d = 0,53\text{Hz}$ und bei der Frequenz $f = 0,355\text{Hz} \sim \frac{2}{3}f_d$ zu erkennen.

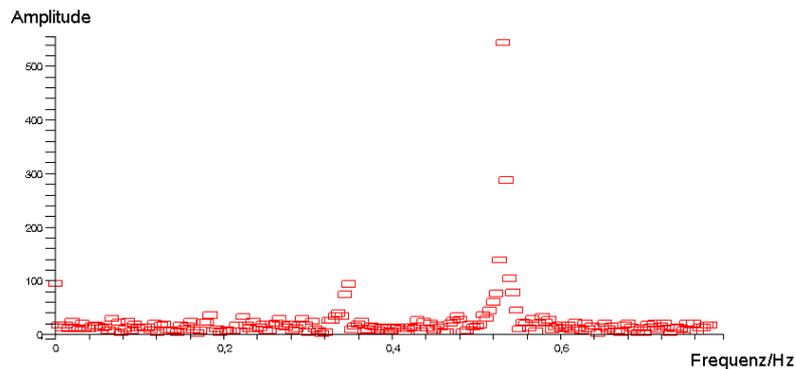


Abbildung 4.5: Fourierspektrum der subharmonischen Antwort

4.2.3 Chaotische Antwort

Ein chaotisches Verhalten des Pendels wurde bei einer Anregungsfrequenz $f_d = 0.369\text{Hz}$ aufgenommen.

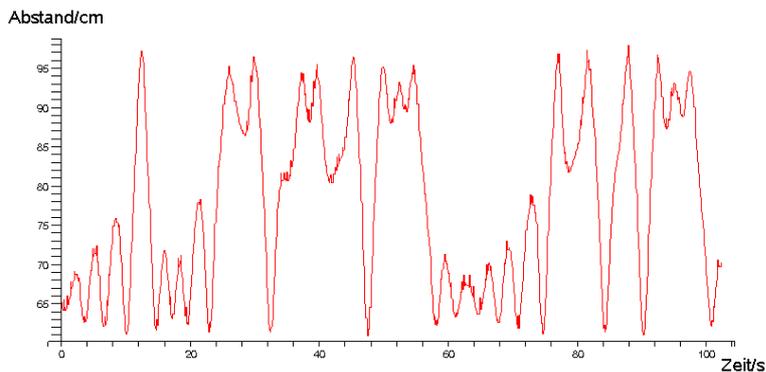


Abbildung 4.6: Chaotisches Verhalten des invertierten Pendels

Das zugehörige Fourierspektrum ist kontinuierlich.

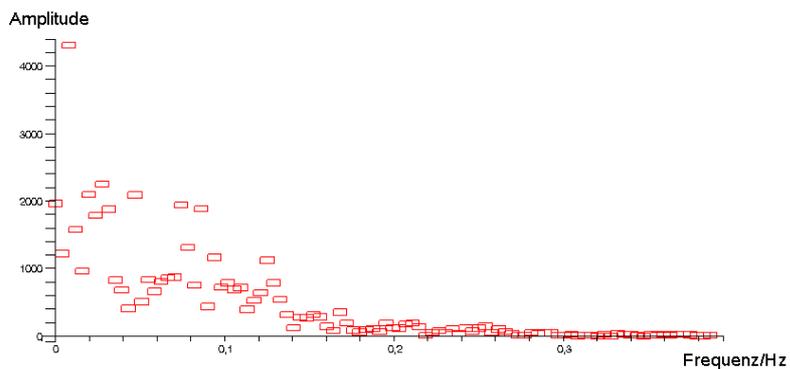


Abbildung 4.7: Fourierspektrum der chaotischen Antwort

5 Amplitudensprung

In diesem Versuchsteil soll der Amplitudensprung und das Hystereseverhalten exemplarisch am invertierten Pendel gezeigt werden.

5.1 Versuchsdurchführung

Das Pendelkörper wird mit 4 gr Zusatzgewichten beschwert. Somit ist das Potential ein einfaches Muldenpotential, da in diesem Fall $k > MgL$ gilt. Die Kraft des Motors bleibt auf 0,5 N eingestellt. Im Programm „Tracker“ wird eine Abtastrate von 1, eine Abtastfrequenz $f_a = 10Hz$ und 128 Datapoints eingestellt. Nun wird die Frequenz schrittweise bis zur Überschreitung des Amplitudensprungs erhöht. Zu jeder Anregerfrequenz wird die Schwingung von Tracker ausgewertet. Aus diesen Daten wird die mittlere Amplitude der Schwingung bestimmt.

5.2 Versuchsergebnisse

In einem Diagramm werden die ermittelten Amplituden gegen die Anregerfrequenz für schrittweise Erhöhung wie auch für schrittweise Erniedrigung der Anregerfrequenz aufgetragen.

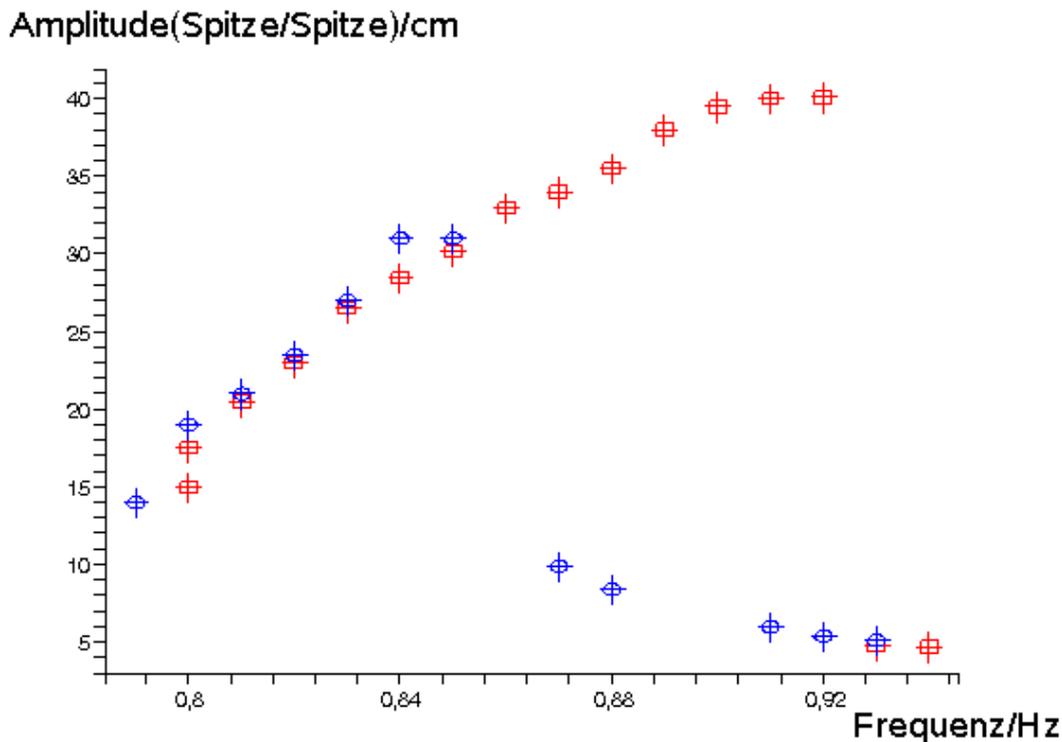


Abbildung 5.1: Amplitudensprung und Hysterese

Rot ist der Hinweg und blau der Rückweg gekennzeichnet. Bei der schrittweisen Erhöhung, sprich beim Hinweg, tritt der Phasensprung bei der Anregerfrequenz $f_d = 0,93Hz$ aus. Auf dem Rückweg tritt der Phasensprung bei deutlich geringerer Anregerfrequenz $f_d = 0,85Hz$ auf. Die Fehler auf Frequenz- und Amplitudenmessung wurden auf $\sigma_f = 0,0025Hz$ und $\sigma_A = 1cm$ abgeschätzt.

6 Bifurkation

Mit dem Programm Duffing wird die eindimensionale, gedämpfte, und periodisch angeregte Bewegung einer Einheitsmasse im Duffingpotential hinsichtlich der Bifurkation untersucht. Hierzu werden die Parameter Anregerfrequenz $w=1,000$ Hz und Federkonstanten $c=0,500$ N/m eingestellt. Variiert wird die Amplitude der anregenden Kraft F_n zwischen 0 und 1 N. Eine Periodenverdopplung erkennt man an der Aufspaltung einer Trajektorie. Bei jeder auftretenden Periodenverdopplung wird die Kraft F notiert. Insgesamt konnten fünf Periodenverdopplungen registriert werden. Eine weitere Erhöhung der Kraft führte zu einer scheinbar kontinuierlichen Fläche im Phasenraum. Das System gleitet also ins Chaos ab.

Diese Daten reichen aus, um die ersten drei Folgenglieder σ_n nach Formel (3) zu berechnen. Diese drei Glieder geben schon einen Hinweis auf den genauen Wert der Feigenbaumzahl. In Tabelle 6.1 sind diese Folgenglieder σ_n mit Fehler angegeben. Die Kraft kann nicht kontinuierlich sondern nur um eine durch den Multiplier festgelegte Schrittweite verändert werden. Diese Schrittweite grenzt die Genauigkeit der Messung ein, so dass dieser Wert den Fehler auf die Kraftamplitude darstellt. In der Tabelle 6.1 ist deutlich zu erkennen, dass sich die Folgenglieder mit steigendem Index langsam der Feigenbaumzahl 4,6692 annähern.

Kraft	Wert	Fehler	σ	Wert	Fehler
F_1	0,34334	0,00391			
F_2	0,35370	0,00391	σ_2	2,52	3,48
F_3	0,35781	0,00012	σ_3	6,23	6,09
F_4	0,35847	0,00006	σ_4	4,71	2,68
F_5	0,35861	0,00002			

Tabelle 6.1: Periodenverdopplung zur Bestimmung der Feigenbaumzahl